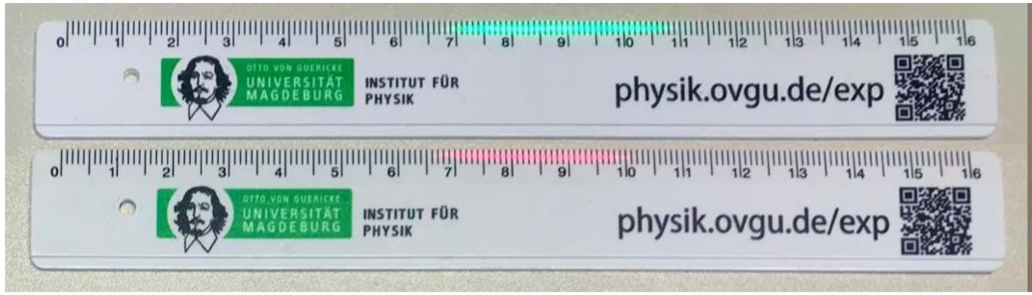
OTTO VON GUERICKE UNIVERSITÄT MAGDEBURG

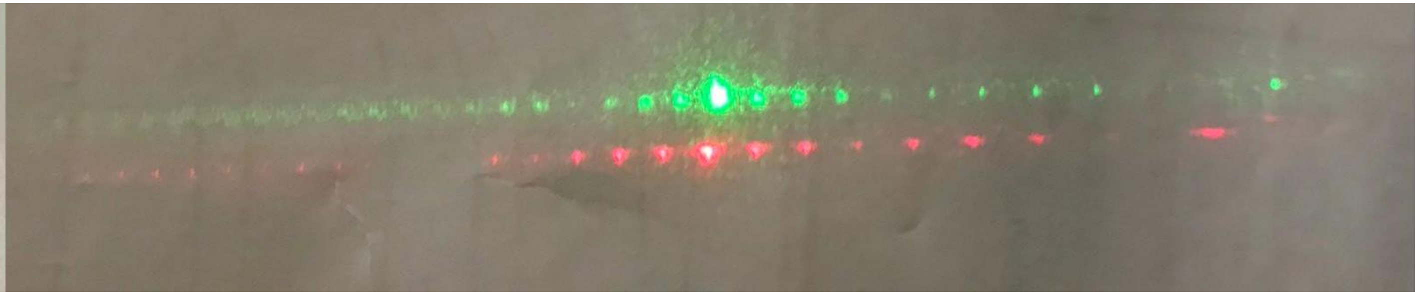
NAT

FAKULTÄT FÜR NATURWISSENSCHAFTEN

Interferenz am Lineal

Grundlagen & Herleitung





Herleitung – Teil I – Wellen

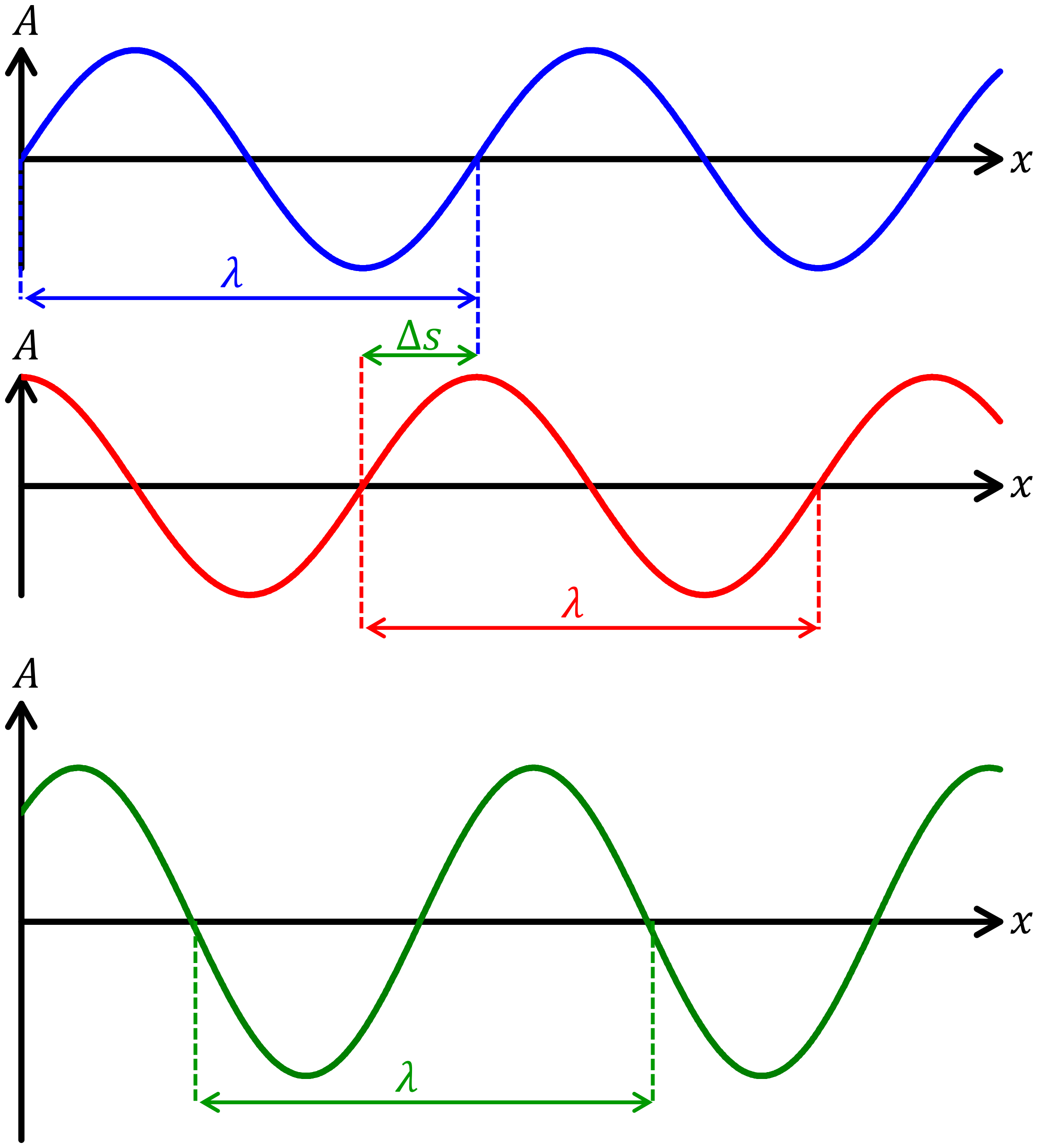
- Licht = elektromagnetische Welle

  Eigenschaften: - Amplitude
  - Wellenlänge
  - Phasenlage

- Überlagerung von zwei Wellen (A und B) gleicher Amplitude und Wellenlänge λ, aber unterschiedlichen Phasenlagen zur Welle C=A+B → **Interferenz**

➢ Maximale Verstärkung
➢ Beliebige Verstärkung
➢ Auslöschung

Die Differenz der Phasenlagen (Gangunterschied Δs) gibt an, ob sich die Wellen verstärken ($\Delta s = n \cdot \lambda$) oder auslöschen ($\Delta s = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \lambda$).



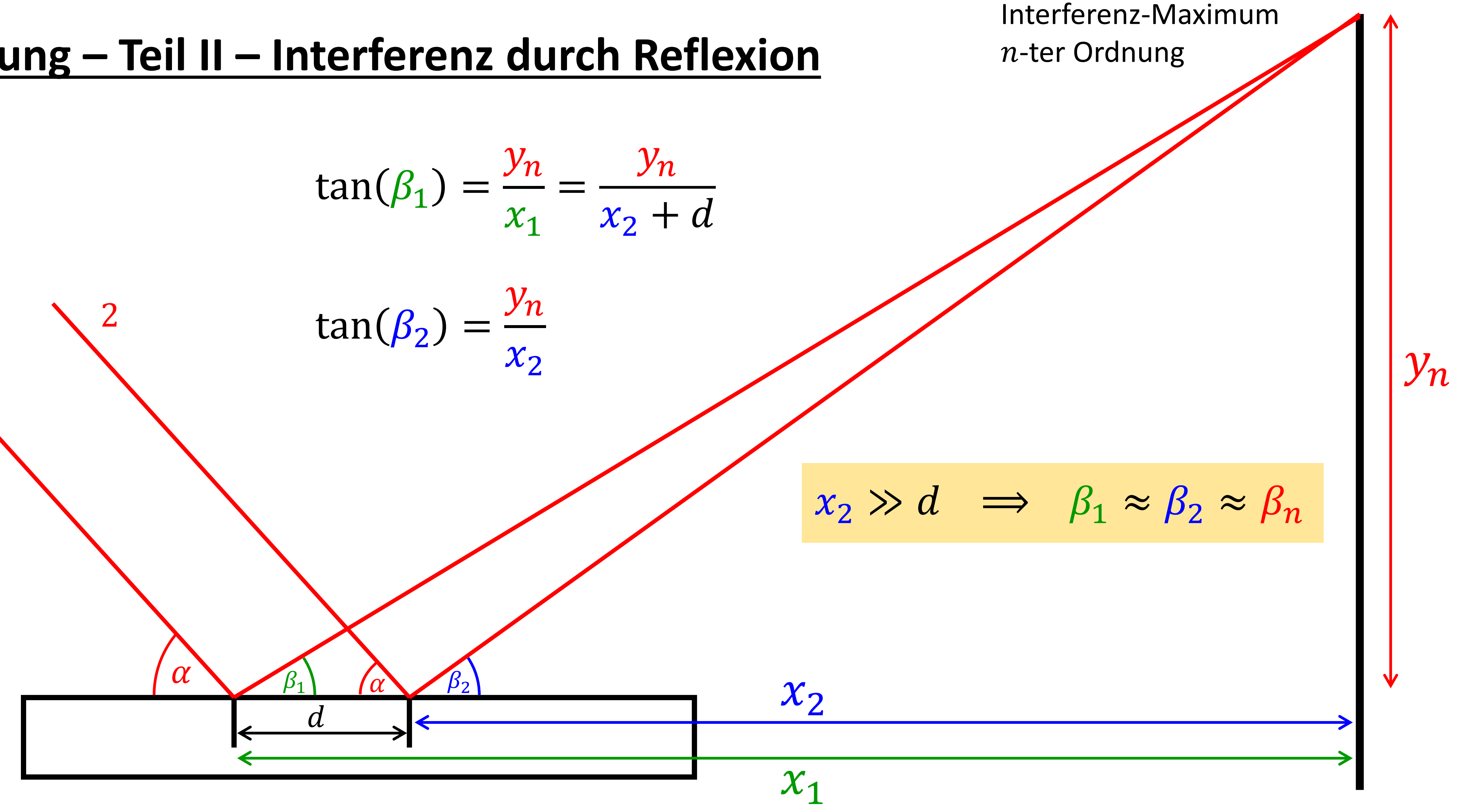
(n ist eine ganze Zahl)

Herleitung – Teil II – Interferenz durch Reflexion

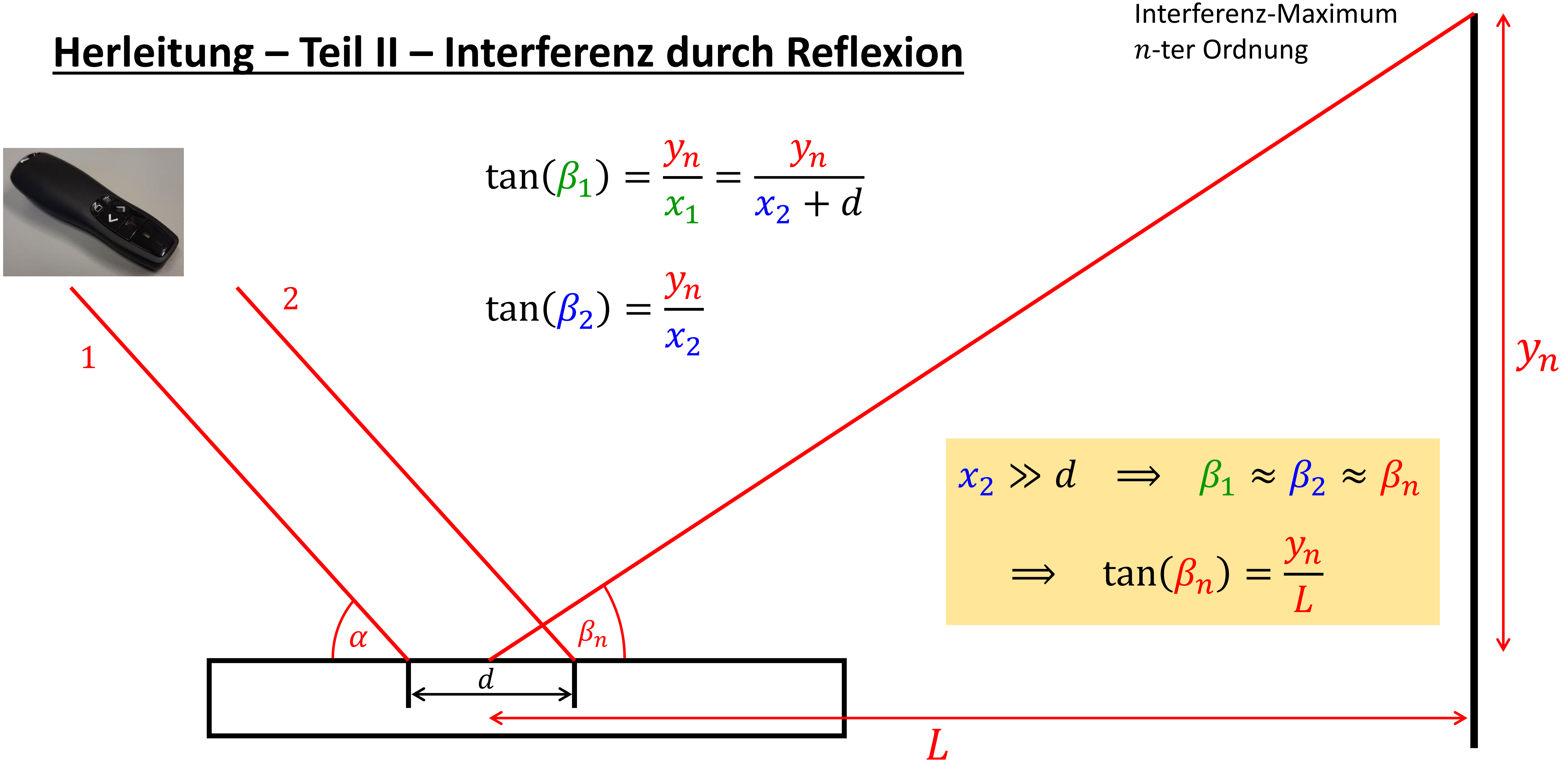
$$\tan(\beta_1) = \frac{y_n}{x_1} = \frac{y_n}{x_2 + d}$$

$$\tan(\beta_2) = \frac{y_n}{x_2}$$

$$x_2 \gg d \quad \Longrightarrow \quad \beta_1 \approx \beta_2 \approx \beta_n$$



Herleitung – Teil II – Interferenz durch Reflexion



$$\tan(\beta_1) = \frac{y_n}{x_1} = \frac{y_n}{x_2 + d}$$

$$\tan(\beta_2) = \frac{y_n}{x_2}$$

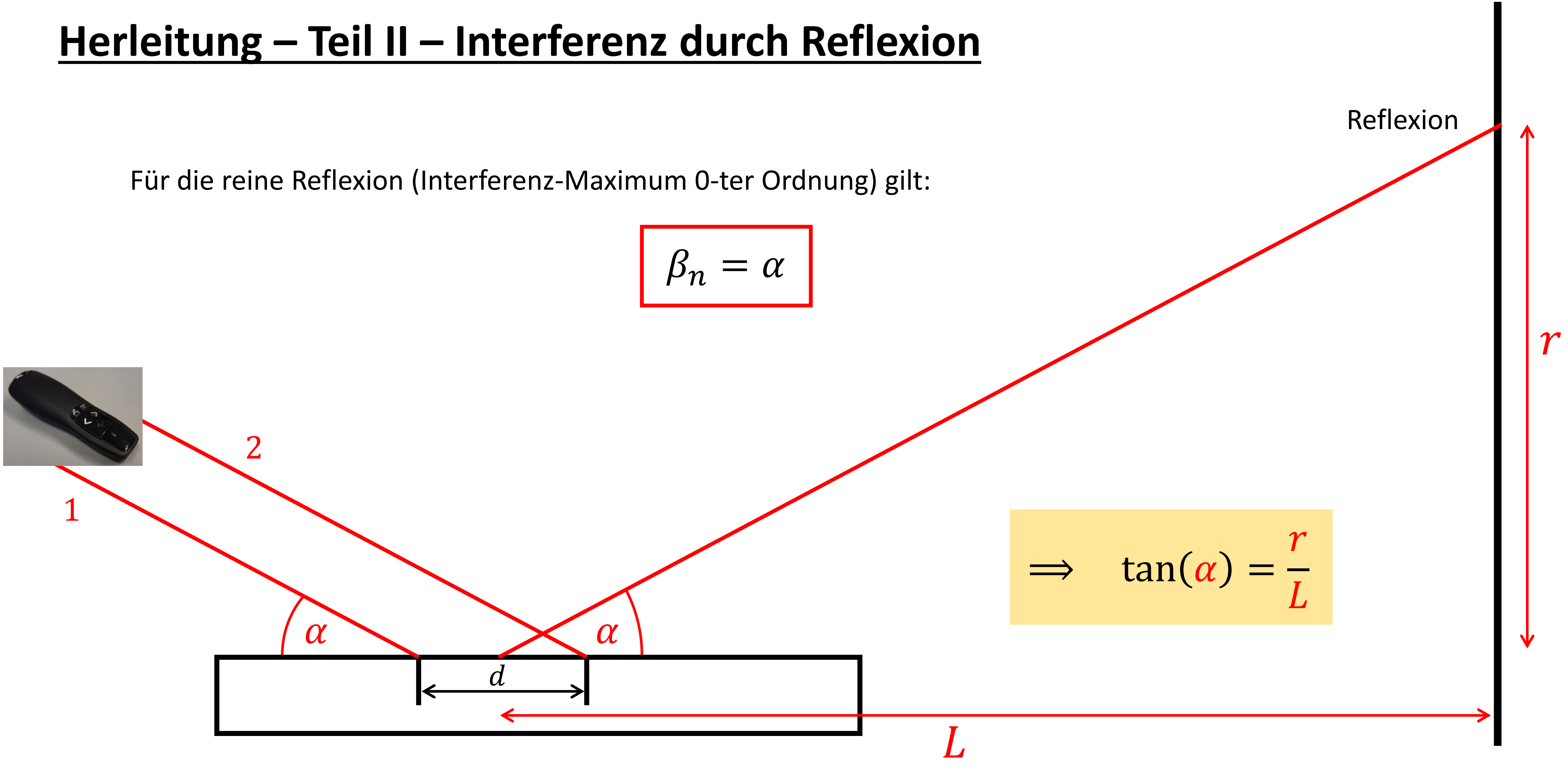
$$x_2 \gg d \quad \Longrightarrow \quad \beta_1 \approx \beta_2 \approx \beta_n$$

$$\Longrightarrow \quad \tan(\beta_n) = \frac{y_n}{L}$$

Herleitung – Teil II – Interferenz durch Reflexion

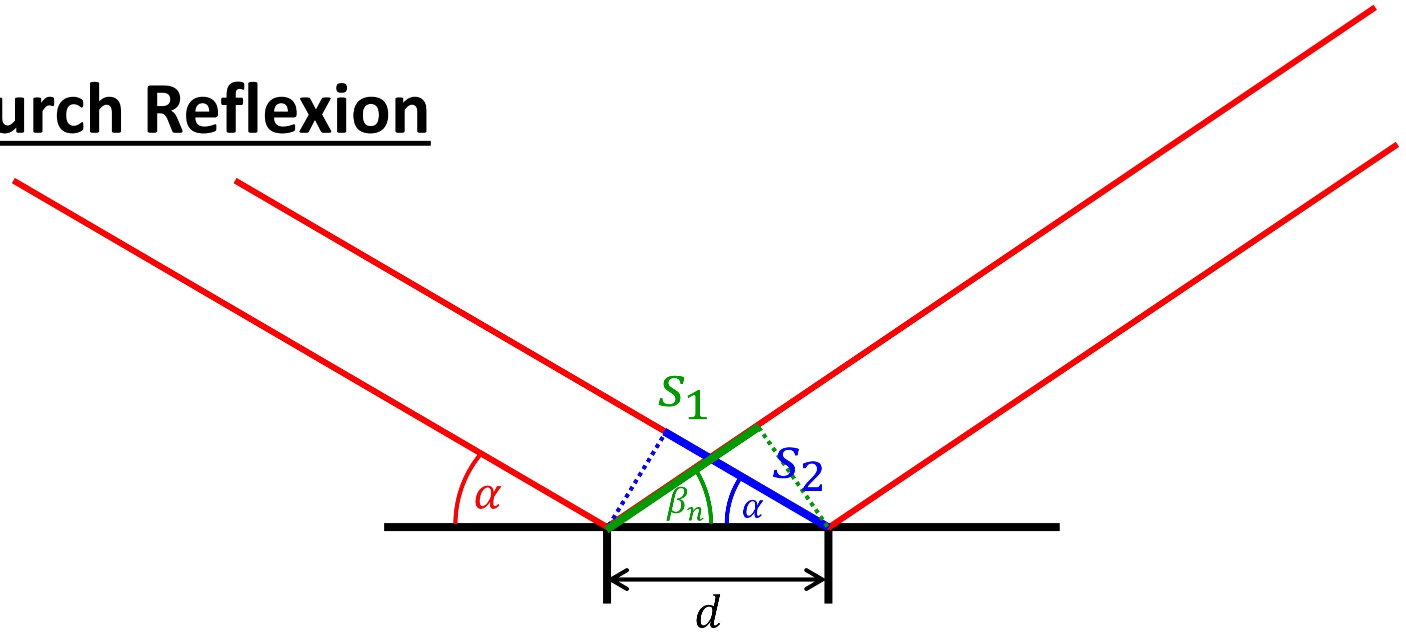
Für die reine Reflexion (Interferenz-Maximum 0-ter Ordnung) gilt:

$$\boxed{\beta_n = \alpha}$$



$$\Longrightarrow \quad \tan(\alpha) = \frac{r}{L}$$

Herleitung – Teil II – Interferenz durch Reflexion



Für gegenseitige Verstärkung der Wellen muss folgende Interferenz-Bedingung erfüllt sein:

$$n \cdot \lambda = \Delta s$$

$$\Delta s = s_2 - s_1$$

$$= d \cdot \cos(\alpha) - d \cdot \cos(\beta_n)$$

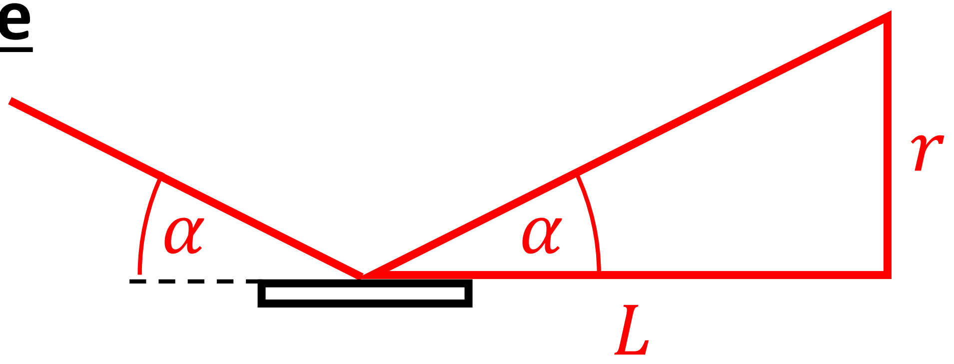
$$\left(\begin{array}{l} \cos(\alpha) = \dfrac{s_2}{d} \\[2ex] \cos(\beta_n) = \dfrac{s_1}{d} \end{array} \right)$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{n \cdot \lambda = d \cdot \left(\cos(\alpha) - \cos(\beta_n) \right)}$$

→ Wir wollen keine Winkel messen, sondern Abstände/Strecken.

Herleitung – Teil III – Trigonometrie

$$\tan(\alpha) = \frac{r}{L} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$



$$\Longrightarrow \quad \tan^2(\alpha) = \left(\frac{r}{L}\right)^2 = \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}$$

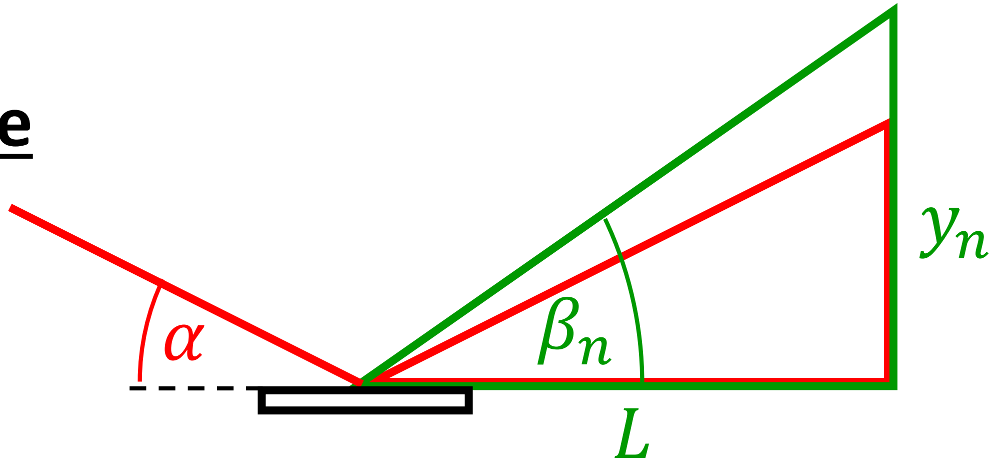
(Trigonometrischer Pythagoras: $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$)

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{r}{L}\right)^2 = \frac{1 - \cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} - 1$$

$$\left(\sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad 1 + \left(\frac{r}{L}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \quad \Longrightarrow \quad \cos^2(\alpha) = \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{L}\right)^2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{L}\right)^2}}}$$

Herleitung – Teil III – Trigonometrie



$$\tan(\beta_n) = \frac{y_n}{L} = \frac{\sin(\beta_n)}{\cos(\beta_n)}$$

$$\Longrightarrow \quad \tan^2(\alpha) = \left(\frac{y_n}{L}\right)^2 = \frac{\sin^2(\beta_n)}{\cos^2(\beta_n)}$$

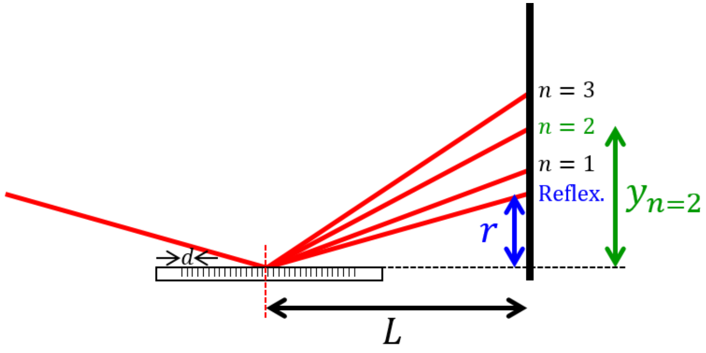
(Trigonometrischer Pythagoras: $\sin^2(\beta_n) + \cos^2(\beta_n) = 1$)

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{y_n}{L}\right)^2 = \frac{1 - \cos^2(\beta_n)}{\cos^2(\beta_n)} = \frac{1}{\cos^2(\beta_n)} - 1$$

$$\left(\sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad 1 + \left(\frac{y_n}{L}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2(\beta_n)} \quad \Longrightarrow \quad \cos^2(\beta_n) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y_n}{L}\right)^2} \Longrightarrow \boxed{\cos(\beta_n) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y_n}{L}\right)^2}}}$$

Zusammenfassung / Ergebnis



Interferenz-Bedingung: $$n \cdot \lambda = \Delta s$$

(Geometrie) $$\Longrightarrow \quad n \cdot \lambda = d \cdot \left(\cos(\alpha) - \cos(\beta_n) \right)$$

(Trigonometrie) $$\Longrightarrow \quad n \cdot \lambda = d \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{L}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y_n}{L}\right)^2}} \right)$$

(Einheitenbetrachtung) $$\Longrightarrow \quad \boxed{\lambda_{\mathrm{nm}} = \frac{d_{\mathrm{mm}}}{n} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r_{\mathrm{cm}}}{L_{\mathrm{cm}}}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y_{n,\mathrm{cm}}}{L_{\mathrm{cm}}}\right)^2}} \right) \cdot 10^6}$$